Chapitre 8

Nombres réels

Sommaire

L'existence des ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est admise.

I L'ENSEMBLE DES RÉELS

1) Rappels sur les rationnels

Un rationnel est un réel de la forme pq^{-1} (ou $\frac{p}{q}$) où p et q sont deux entiers avec $q \neq 0$. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple : $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{-p}{-q}$. Mais tout nombre rationnel s'écrit de manière **unique** sous forme de fraction **irréductible**, c'est à dire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et avec p et q **premiers entre eux** (*i.e.* sans autres diviseurs communs que 1 et -1).

Opérations sur les rationnels

On rappelle que : $\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{aq+bp}{bq}$ et $\frac{p}{q} \times \frac{a}{b} = \frac{ap}{bq}$. L'addition et la multiplication sont donc des lois de composition internes dans $\mathbb{Q}$, on vérifie que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un **corps commutatif**. On vérifie également que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}^{*+}, \times)$ sont des groupes commutatifs.

L'ensemble des rationnels est insuffisant

En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la **valeur exacte** de certaines grandeurs. Par exemple, peut - on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de *Pythagore*[1], cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Cette lacune de $\mathbb{Q}$ avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les **irrationnels**, en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

1. *PYTHAGORE De Samos* (569 av J.-C. – 500 av J.-C. (environ)) : mathématicien et philosophe grec dont la vie et l'œuvre restent entourées de mystères.

2) Opérations et ordre sur les réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ et possède une addition et une multiplication (qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$) qui font que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif. On admettra également qu'il existe deux parties de $\mathbb{R}$ que l'on note A et B et qui vérifient :

– A et B sont stables pour l'addition.
– $\mathbb{Q}^+ \subset \mathrm{A}$ et $\mathbb{Q}^- \subset \mathrm{B}$.
– $\mathbb{R} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
– $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{0\}$.
– Si $x, y \in \mathrm{A}$ alors $xy \in \mathrm{A}$, si $x, y \in \mathrm{B}$ alors $xy \in \mathrm{A}$ et si $x \in \mathrm{A}$ et $y \in \mathrm{B}$, alors $xy \in \mathrm{B}$ (règle des signes).

On définit alors une relation $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x\mathscr{R}y \iff x - y \in \mathrm{B}$. Cette relation est :

– Réflexive : $\forall\ x \in \mathbb{R}, x\mathscr{R}x$.
– Antisymétrique : si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ alors $x = y$.
– Transitive : si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $x\mathscr{R}z$.

Le relation $\mathscr{R}$ est donc une relation **d'ordre** sur $\mathbb{R}$. On la notera désormais $\leqslant$, c'est à dire que $x\mathscr{R}y$ sera noté $x \leqslant y$ (*i.e.* $x - y \in \mathrm{B}$).

On remarquera que $x \leqslant 0$ signifie que $x \in \mathrm{B}$, et que $0 \leqslant x$ signifie que $-x \in \mathrm{B}$ et donc $x \in \mathrm{A}$ car $x = (-1)(-x)$: produit de deux éléments de B. D'autre part, si $x \in \mathrm{A}$ et $y \in \mathrm{B}$, alors $x \leqslant y$ car $y - x = y + (-x)$: somme de deux éléments de B.

Si x et y sont deux réels quelconques, on a $x - y \in \mathrm{A}$ ou $x - y \in \mathrm{B}$, c'est à dire $x - y \in \mathrm{B}$ ou $y - x \in \mathrm{B}$, c'est à dire encore $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Deux réels sont donc toujours comparables, l'ordre est **total**.

Notation : On pose $\mathrm{A} = \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{B} = \mathbb{R}^-$.

Théorème 8.1

La relation d'ordre $\leqslant$ est :

• *Compatible avec l'addition, c'est à dire :*

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R},\ \text{si } x \leqslant y \text{ alors } x + z \leqslant y + z.$$

• *Compatible avec la multiplication par un réel positif :*

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R},\ \text{si } 0 \leqslant z \text{ et } x \leqslant y, \text{ alors } xz \leqslant yz.$$

Preuve : Si $x \leqslant y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$, mais $(x+z)-(y+z) = x - y$, donc $(x+z)-(y+z) \in \mathbb{R}^-$ *i.e.* $x + z \leqslant y + z$. Si $0 \leqslant z$ et $x \leqslant y$, alors $x - y \in \mathbb{R}^-$ donc $z(x-y) \in \mathbb{R}^-$, *i.e.* $zx \leqslant zy$. On remarquera que si $z \leqslant 0$ alors $z(x-y) \in \mathbb{R}^+$ donc $zy \leqslant zx$, l'inégalité change de sens. □

Conséquences

– Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x + a \leqslant y + b$.
– Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $0 \leqslant ax \leqslant by$.

II BORNE INFÉRIEURE, BORNE SUPÉRIEURE

1) Propriété fondamentale de l'ensemble des réels

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit a un réel, on dit que :

– I est majorée par a (ou a est un majorant de I), lorsque tout élément de I est inférieur ou égal à a : $\forall\ x \in \mathrm{I}, x \leqslant a$.
– I est minorée par a (ou a est un minorant de I), lorsque tout élément de I est supérieur ou égal à a : $\forall\ x \in \mathrm{I}, x \geqslant a$.
– I est bornée, lorsque I est à la fois minorée et majorée : $\exists\ m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall\ x \in \mathrm{I}, m \leqslant x \leqslant \mathrm{M}$.

☞**Exemples** :

– L'ensemble $\mathrm{I} = \{\frac{x^2}{1+x^2}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est borné (minoré par 0 et majoré par 1).
– L'ensemble $\mathrm{I} = \{\frac{x^2}{1+|x|}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$ est minoré par 0, mais non majoré.

Remarque 8.1 –

– I *est non majoré équivaut à :* $\forall\ \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathrm{I}, x > \mathrm{M}$.
– I *est non minoré équivaut à :* $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathrm{I}, x < m$.
– I *est borné équivaut à :* $\exists\ \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall\ x \in \mathrm{I}, |x| \leqslant \mathrm{M}$.

Définition 8.1

Soit I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$. *Si l'ensemble des majorants de* I *n'est pas vide et s'il admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé* ***borne supérieure*** *de* I *et noté* $\sup(\mathrm{I})$. *La borne supérieure (lorsqu'elle existe) est donc* ***le plus petit des majorants****.*
Si l'ensemble des minorants de I *n'est pas vide et s'il admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé* ***borne inférieure*** *de* I *et noté* $\inf(\mathrm{I})$. *La borne inférieure (lorsqu'elle existe) est donc* ***le plus grand des minorants****.*

☞**Exemples** :
- $\mathrm{I} =]0;1]$, l'ensemble des majorants est $[1;+\infty[$, celui-ci admet un plus petit élément qui est 1, donc $\sup(\mathrm{I}) = 1$. L'ensemble des minorants de I est $]-\infty;0]$ qui admet un plus grand élément : 0, donc $\inf(\mathrm{I}) = 0$.
- $\mathrm{I} =]1;+\infty[$, l'ensemble des majorants est vide donc I **n'a pas de borne supérieure**. L'ensemble des minorants est $]-\infty;1]$, celui-ci admet un plus grand élément : 1, donc $\inf(\mathrm{I}) = 1$.

Attention !

On remarquera qu'une borne inférieure (ou supérieure) d'un ensemble I *n'a aucune raison d'appartenir à* I.

Voici le lien entre minimum et borne inférieure (ou maximum et borne supérieure) :

Théorème 8.2

Soit I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et soit* a *un réel :*
• $a = \min(\mathrm{I})$ *ssi* $a \in \mathrm{I}$ *et* $a = \inf(\mathrm{I})$.
• $a = \max(\mathrm{I})$ *ssi* $a \in \mathrm{I}$ *et* $a = \sup(\mathrm{I})$.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Il découle de la définition :

Théorème 8.3

Soit I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et soit* m *un réel, alors :*

$$m = \sup(\mathrm{I}) \iff \begin{cases} m \text{ majore } \mathrm{I} \\ \forall \varepsilon > 0, m - \varepsilon \text{ ne majore pas } \mathrm{I}, \textit{ i.e. } \exists x \in \mathrm{I}, m - \varepsilon < x \end{cases}.$$

$$m = \inf(\mathrm{I}) \iff \begin{cases} m \text{ minore } \mathrm{I} \\ \forall \varepsilon > 0, m + \varepsilon \text{ ne minore pas } \mathrm{I}, \textit{ i.e. } \exists x \in \mathrm{I}, x < m + \varepsilon \end{cases}.$$

Théorème 8.4 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (admise))

Toute partie de $\mathbb{R}$ ***non vide et majorée*** *admet une borne supérieure.*

Conséquence : il en découle que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.
Preuve : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par un réel m, alors l'ensemble $-\mathrm{A} = \{-a \mid a \in \mathrm{A}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par le réel $-m$. D'après le théorème précédent, $-\mathrm{A}$ admet une borne supérieure M et donc l'ensemble des majorants de $-\mathrm{A}$ est $[\mathrm{M}, +\infty[$, on en déduit que l'ensemble des minorants de A est $]-\infty; -\mathrm{M}]$ et donc A admet une borne inférieure qui est $-\mathrm{M}$, c'est à dire $\inf(\mathrm{A}) = -\sup(-\mathrm{A})$. □

☞**Exemples** :
- Soit a un réel positif, on pose $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant a\}$. A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $0 \in \mathrm{A}$, d'autre part A est majoré par $a+1$ car $x > a+1 \implies x^2 > a^2 + 2a + 1 > a$. L'ensemble A admet donc une borne supérieure M. En raisonnant par l'absurde on peut montrer que $\mathrm{M}^2 = a$, par conséquent $\mathrm{M} = \sqrt{a}$, c'est une définition possible de la fonction racine carrée.
- Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Montrer que $\inf(\mathrm{B}) \leqslant \inf(\mathrm{A})$ et $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \sup(\mathrm{B})$.
  Réponse : $\inf(\mathrm{B})$ est un minorant de B donc un minorant de A, par conséquent $\inf(\mathrm{B}) \leqslant \inf(\mathrm{A})$ car $\inf(\mathrm{A})$ est le plus grand des minorants de A. De même, $\sup(\mathrm{B})$ majore B , donc majore A également, d'où $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \sup(\mathrm{B})$ car $\sup(\mathrm{A})$ est le plus petit des majorants de A.

– Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées, on pose $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$. Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
Réponse : $\sup(A)+\sup(B)$ majore $A+B$, donc $A+B$ admet une borne sup. et $\sup(A+B)\leqslant \sup(A)+\sup(B)$. Soient $a\in A$ et $b\in B$, $a+b\leqslant \sup(A+B)$, donc $a\leqslant \sup(A+B)-b$, ce qui signifie que A est majoré par $\sup(A+B)-b$, d'où $\sup(A)\leqslant \sup(A+B)-b$, mais alors $b\leqslant \sup(A+B)-\sup(A)$, donc B est majoré par $\sup(A+B)-\sup(A)$, d'où $\sup(B)\leqslant \sup(A+B)-\sup(A)$ et finalement $\sup(A)+\sup(B)\leqslant \sup(A+B)$ ce qui prouve bien l'égalité.

2) Intervalles

Définition 8.2
*Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que I est un intervalle lorsque : **tout réel compris entre deux éléments de I est lui-même élément de I**, c'est à dire :*

$$\forall\, x,y\in I, \forall\, z\in\mathbb{R}, x\leqslant z\leqslant y \implies z\in I.$$

Par convention, $\varnothing$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 8.5
Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ alors on a :
- *soit $I=\mathbb{R}$,*
- *soit $I=[a;+\infty[$ ou $I=]a,+\infty[$,*
- *soit $I=]-\infty;b]$ ou $I=]-\infty;b[$,*
- *soit $I=]a;b[$ ou $I=]a;b]$ ou $I=[a;b[$ ou $I=[a;b]$.*

Preuve : Le premier correspond à I non borné, le deuxième à I minoré et non majoré, le troisième à I non minoré et majoré, le quatrième à I borné. □

☞**Exemple** : $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ car $1,2\in\mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2}$. $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 8.6
On a les propriétés suivantes :
- *L'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*
- *La réunion de deux intervalles de $\mathbb{R}$ **non disjoints** est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, posons $K=I\cap J$. Si K est vide, alors c'est un intervalle. Si K n'est pas vide, alors soit $x,y\in K$ et soit z un réel tel que $x\leqslant z\leqslant y$. Comme I est un intervalle contenant x et y, I contient z, de même J contient z, finalement $z\in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Supposons I et J non disjoints et soit $K=I\cup J$. K est non vide, soit $x,y\in K$ et soit z un réel tel que $x\leqslant z\leqslant y$. Si x et y sont dans I, alors z est dans I et donc dans K, de même si x et y sont dans J. Si x est dans I et y dans J, soit $t\in I\cap J$, si $z\leqslant t$, alors z est compris entre x et t qui sont éléments de I, donc $z\in I$. Si $t\leqslant z$, alors z est compris entre t et y qui sont éléments de J, donc z est élément de J. Dans les deux cas on a bien $z\in K$ et donc K est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

3) La droite numérique achevée

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux éléments non réels (par exemple i et $-i$), l'un de ces deux éléments est noté $-\infty$ et l'autre $+\infty$.

Définition 8.3
*L'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ est noté $\overline{\mathbb{R}}$ et appelé **droite numérique achevée**.*

On prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x : $-\infty<x<+\infty$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné, de plus il possède un maximum ($+\infty$) et un minimum ($-\infty$).

Pour tout réel x on pose :
- $(+\infty)+x=x+(+\infty)=+\infty$.
- $(-\infty)+x=x+(-\infty)=-\infty$.
- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.

– $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
– Si $x>0$: $x(+\infty)=(+\infty)x=+\infty$ et $(-\infty)x=x(-\infty)=-\infty$.
– si $x<0$: $x(+\infty)=(+\infty)=-\infty$ et $(-\infty)x=x(-\infty)=+\infty$.
– $(+\infty)(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)(-\infty)=+\infty$ et $(-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$.

Remarque 8.2 – *On prendra garde au fait que nous n'avons pas défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque nous n'avons pas défini $0\times(\pm\infty)$ ni $(-\infty)+(+\infty)$. Les règles de calculs définies ci-dessus auront leur utilité dans le chapitre sur les limites.*

Théorème 8.7
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Preuve : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$ alors admet une borne supérieure réelle (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des majorants est $\{+\infty\}$, donc il y a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est $+\infty$ (le plus petit majorant). Le raisonnement est le même pour la borne inférieure. □

4) Voisinages

Définition 8.4
*Soit $x\in\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]x-\varepsilon;x+\varepsilon[$ où $\varepsilon>0$ est appelé **voisinage** de x .*
Tout intervalle ouvert de la forme $]a;+\infty[$ ($a\in\mathbb{R}$) est appelé voisinage de $+\infty$.
Tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;a[$ ($a\in\mathbb{R}$) est appelé voisinage de $-\infty$.

Théorème 8.8
Soit V_1, V_2 deux voisinages de $x\in\overline{\mathbb{R}}$, alors $V_1\cap V_2$ est un voisinage de x. Soit $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, si $a<b$ alors il existe un voisinage V de a et un voisinage V′ de b tels que $\forall x\in V$ et $\forall y\in V'$, $x<y$.

Preuve : Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

Définition 8.5
*Soit $P(x)$ une proposition dépendante de $x\in\mathbb{R}$, et soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$, on dit que la propriété P est **vraie au voisinage** de a **lorsqu'il existe au moins un voisinage** V de a tel que :*

$$\forall\ x\in V, P(x) \text{ est vraie.}$$

☞**Exemple** : Soit $f(x)=x^2+x-1$, alors au voisinage de 0 on a $f(x)<0$, et au voisinage de $+\infty$, $f(x)>0$. En effet, le trinôme x^2+x-1 admet deux racines réelles : $x_1<0$ et $x_2>0$, posons $\varepsilon=\min(|x_1|,|x_2|)$, si $x\in]0-\varepsilon;0+\varepsilon[$ alors $x\in]x_1;x_2[$ et donc $x^2+x-1<0$, $V=]0-\varepsilon;0+\varepsilon[$ est donc un voisinage de 0 et sur ce voisinage on a bien $f(x)<0$. Posons $W=]x_2;+\infty[$, alors W est un voisinage de $+\infty$ et sur ce voisinage on a bien $f(x)>0$.

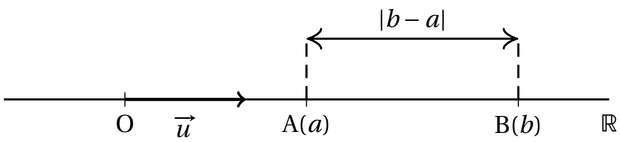
III APPROXIMATION D'UN RÉEL

1) Valeur absolue

Soit x un réel, les deux nombres x et $-x$ sont comparables puisque l'ordre est total, ce qui donne un sens à la définition suivante :

Définition 8.6
*Soit $x\in\mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x|=\max(x,-x)$. On a donc $|x|=x$ lorsque $0\leqslant x$, et $|x|=-x$ lorsque $x\leqslant 0$.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être assimilé à une droite graduée (*i.e.* munie d'un repère $(O,\vec{u})$), les réels sont alors les abscisses des points de cette droite. Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de cette droite, alors le réel positif $|b-a|$ représente la **distance** de A à B, en particulier $|x|$ représente la distance de l'origine au point d'abscisse x.



Théorème 8.9

Soient x, y des réels :
- $|x| \in \mathbb{R}^+$, $|x| = |-x|$, $x \leqslant |x|$ *et* $-x \leqslant |x|$.
- $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|xy| = |x||y|$ *et si* $x \neq 0$ *alors* $|\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$. *On en déduit que* $||frac1x| = \frac{1}{|x|}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.
- $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$ (***inégalité triangulaire***).

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

À retenir

Soient a, b, x trois réels avec b positif :
- $|a| \leqslant b \iff a \leqslant b$ et $-a \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$.
- $|a| \geqslant b \iff a \geqslant b$ ou $-a \geqslant b$.
- $|a - x| \leqslant b \iff -b \leqslant a - x \leqslant b \iff a - b \leqslant x \leqslant a + b$.
- $|a - x| \geqslant b \iff x \geqslant a + b$ ou $x \leqslant a - b$.

Ces inégalités sont importantes, et peuvent se retrouver en raisonnant en termes de distance.

Définition 8.7

Soit a un réel et $\varepsilon > 0$, on appelle intervalle ***ouvert*** *de* ***centre a*** *et de* ***rayon*** ε, *l'intervalle* $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$. *C'est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| < \varepsilon$. On définit de la même façon l'intervalle fermé de centre a et de rayon ε.*

On rappelle qu'un intervalle ouvert est un intervalle de la forme : $]a; b[$ ou $]a; +\infty[$ ou $]-\infty; b[$. L'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts.

Théorème 8.10

Soit I *un intervalle ouvert non vide, pour tout élément a de* I *il existe au moins un voisinage de a inclus dans* I : $\forall\ a \in \mathrm{I}, \exists\ \varepsilon > 0,\ ]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset \mathrm{I}$.

Preuve : Il suffit de passer en revue les différents cas pour I. Par exemple, si $\mathrm{I} =]\alpha; \beta[$ avec $\alpha < \beta$ (sinon I est vide), on peut prendre $\varepsilon = \min(a - \alpha, \beta - a)$. On remarquera que l'on peut remplacer intervalle ouvert de centre a par intervalle fermé de centre a. □

2) Partie entière

Théorème 8.11

L'ensemble $\mathbb{R}$ *est* ***archimédien***, *c'est à dire :* $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^{*+}, \exists\ n \in \mathbb{N}, x \leqslant ny$.

Preuve : Par l'absurde, supposons que $\forall\ n \in \mathbb{N}, x > ny$. Soit $\mathrm{A} = \{ny\ /\ n \in \mathbb{N}\}$, A est non vide (contient y) et majoré par x, donc A admet une borne supérieure. Soit $b = \sup(\mathrm{A})$, on a $b - y < b$ donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b - y < n_0 y$, d'où $b < (n_0 + 1)y$ ce qui est absurde car $(n_0 + 1)y \in \mathrm{A}$. □

Théorème 8.12 **(et définition)**

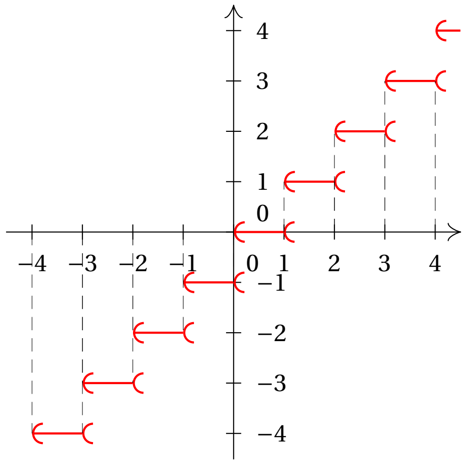
Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un ***unique*** *entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$, celui-ci est appelé* ***partie entière*** *de x, noté $\lfloor x \rfloor$ (ou $\mathrm{E}(x)$).*

Preuve : Montrons l'existence : si $x=0$ il suffit de prendre $n=0$. Supposons x non nul et soit $\mathrm{A}=\{n\in\mathbb{Z} \ / \ x<n+1\}$, on vérifie que A est non vide (si $x<0$ alors $0\in\mathrm{A}$ et si $x>0$ on utilise que $\mathbb{R}$ est archimédien), de plus A est minoré par $x-1$, cet ensemble admet donc une borne inférieure c. On a $c<c+\frac{1}{2}$ donc le réel $c+\frac{1}{2}$ ne minore pas A donc il existe un entier $n_0\in\mathrm{A}$ tel que $c\leqslant n_0<c+\frac{1}{2}$, si $c<n_0$, alors n_0 ne minore pas A, donc il existe $n_1\in\mathrm{A}$ tel que $c\leqslant n_1<n_0<c+\frac{1}{2}$ ce qui est absurde car n_0 et n_1 sont deux entiers distincts dans un intervalle de longueur $\frac{1}{2}$. On en déduit que $c=n_0\in\mathrm{A}$ d'où $n_0=\min(\mathrm{A})$, mais alors $n_0-1\notin\mathrm{A}$, c'est à dire $x\geqslant n_0-1+1$, par conséquent on a $n_0\leqslant x<n_0+1$.

Montrons l'unicité : soient $n,n'\in\mathbb{Z}$ tels que $n\leqslant x<n+1$ et $n'\leqslant x<n'+1$, alors $|n-n'|=|(x-n)-(x-n')|<1$ car $x-n$ et $x-n'$ sont dans l'intervalle $[0;1[$, comme n et n' sont entiers, on en déduit que $|n-n'|=0$ *i.e.* $n=n'$. □

Propriétés

a) La fonction partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et elle constante sur tout intervalle de la forme $[n;n+1[$ lorsque $n\in\mathbb{Z}$.



b) La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, elle est continue à droite mais pas à gauche en n.

c) Pour tout réel x et tout entier n, on a $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

d) La fonction $x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ est une fonction 1-périodique.

e) La partie entière de x est entièrement caractérisée par : $\left\{\begin{array}{l}\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}\\ \lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1\end{array}\right.$.

Théorème 8.13

Tout intervalle de la forme $]a;b[$ où $a<b$ contient au moins un rationnel, on dit que $\mathbb{Q}$ est ***dense*** *dans $\mathbb{R}$.*

Preuve : Il existe $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $q(b-a)>1$ (pendre $q=1+\left\lfloor\frac{1}{b-a}\right\rfloor$), l'intervalle $]qa;qb[$ a donc une longueur supérieure à 1, il contient donc au moins un entier p (prendre $p=qb-1$ si qb est entier, prendre $p=\lfloor qb\rfloor$ sinon). On a alors $qa<p<qb$ d'où $a<\frac{p}{a}q<b$ et $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$. □

Remarque 8.3 – *Ce théorème traduit que aussi près que l'on veut de n'importe quel réel, on peut trouver des rationnels. De plus la démonstration fournit une méthode de construction de $\frac{p}{q}$.*

Par exemple, avec $x=\sqrt{2}$ et $\varepsilon=10^{-3}$, on peut prendre $q=1000$ et $p=\lfloor 1000\sqrt{2}\rfloor=1414$ (car $1414^2\leqslant 2.10^6<1415^2$), d'où $\frac{p}{q}=1{,}414$ et $|\sqrt{2}-1{,}414|<10^{-3}$.

Théorème 8.14

Tout intervalle $]a;b[$ où $a<b$ contient au moins un irrationnel, donc l'ensemble des irrationnels, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, est densedans $\mathbb{R}$.

Preuve : D'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $r\in]a-\sqrt{2};b-\sqrt{2}[$, ce qui donne $r+\sqrt{2}\in]a;b[$, et on montre par l'absurde que $r+\sqrt{2}$ est irrationnel. □

Définition 8.8 (Généralisation)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de A, ce qui équivaut à :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A, |x-a| < \varepsilon.$$

Remarque 8.4 –
- *Ce qui signifie qu'aussi près que l'on veut de tout réel x, on peut trouver des éléments de* A*. Voici une autre définition équivalente (et très utile) :*
- A *est dense dans* $\mathbb{R}$ *ssi pour tout réel x il existe une suite (a_n) d'éléments de* A *qui converge vers x.*

3) Approximations décimales

Définition 8.9

Soient a, x, ε trois réels avec $\varepsilon > 0$, on dit que a est une ***valeur approchée*** *de x à ε près lorsque la distance entre a et x et inférieure ou égale à ε : $|a-x| \leqslant \varepsilon$. On dit que a est une valeur approchée de x par défaut (respectivement par excès) à ε près lorsque $a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$ (respectivement $a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a$).*

Propriétés

a) Si a est une valeur approchée de x par défaut et b une valeur approchée de x par excès, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

b) Si a est une valeur approchée de x par défaut à ε près et b une valeur approchée de x par excès à ε près, alors $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\frac{\varepsilon}{2}$ près.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor x10^n \rfloor \leqslant x10^n < 1 + \lfloor x10^n \rfloor$, en multipliant par 10^{-n} on obtient :

$$\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} \leqslant x < \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} + 10^{-n}.$$

Ce qui signifie que $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$ est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-n} près, et que $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n} + 10^{-n}$ est une valeur approchée de x par excès à 10^{-n} près. Il faut remarquer que ces deux approximations de x sont des **nombres décimaux** (*i.e.* un entier sur une puissance de dix).

Définition 8.10

On appelle ***approximation décimale*** *de x par défaut à 10^{-n} près, le nombre : $\frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$.*

Remarque 8.5 – *Posons $r_n = \lfloor 10^n x \rfloor$, alors $10r_n \leqslant 10^{n+1}x < 10r_n + 10$ et donc $10r_n \leqslant \lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leqslant 10r_n + 9$, i.e. $r_{n+1} \in [10r_n ; 10r_n + 9]$.*

☞**Exemples** :
- Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$
  - $1 \leqslant x^2 < 2^2$, donc $1 \leqslant x < 2$ et $a_0 = \lfloor x \rfloor = 1$ (partie entière de x).
  - $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leqslant (10x)^2 < 15^2 = 225$, donc $14 \leqslant 10x < 15$ et $a_1 = \lfloor 10x \rfloor / 10 = 14/10 = 1,4$.
  - $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leqslant (100x)^2 < 142^2$, donc $141 \leqslant 100x < 142$ et $a_2 = \lfloor 100x \rfloor / 100 = 141/100 = 1,41$...etc

  Si on continue le processus, on construit la suite (a_n) des approximations décimales de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près par défaut.

Si on pose pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$, alors on a l'inégalité $|x - a_n| \leqslant 10^{-n}$, ce qui prouve que la suite (a_n) converge vers x. On a donc une suite de rationnels qui converge vers x, ce qui est une autre façon de prouver la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On remarquera que la suite $(a_n + 10^{-n})$ (valeurs approchées décimales par excès) converge également vers x.

Théorème 8.15

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a_n = \frac{\lfloor x10^n \rfloor}{10^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$, alors d_n est un entier compris entre 0 et 9.

Preuve : $10^n a_n = \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < 1 + \lfloor 10^n x \rfloor$, d'autre part $10^n a_{n-1} = 10 \lfloor 10^{n-1}x \rfloor \leqslant 10^n x < 10 + 10 \lfloor 10^{n-1}x \rfloor$, d'où $-10 - \lfloor 10^{n-1}x \rfloor < -10^n x \leqslant -10^n a_{n-1}$, on en déduit que $d_n - 10 < 0 < d_n + 1$, par conséquent $0 \leqslant d_n < 10$, or d_n est un entier, donc $d_n \leqslant 9$. □

Définition 8.11

*Pour $n \geqslant 1$, l'entier $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1}) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ est appelé n^e **décimale** de x.*

Remarquons que $d_n 10^{-n} = a_n - a_{n-1}$, ce qui entraîne que $a_0, d_1 d_2 \dots d_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{-k} = a_n$, or la suite (a_n) converge vers x, on écrit alors :

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k 10^{-k} = a_0, d_1 d_2 \cdots \text{ (développement décimal infini de } x\text{)}$$

IV SOLUTION DES EXERCICES